Curve上のDel Pezzo fibrationについて

藤田, 隆夫

Curve上のDel Pezzo fibrationについて

東工大 理 藤田 隆夫

Introduction

まず主題の定義について説明する。$f:M \longrightarrow C$ を複素多様体(manifold = smooth variety) M から smooth curve C への全射正則写像とし，$\dim M = m = n+1$ とおく。もちろん general fiber は n 次元である。さて L を f-ample な M 上の line bundle とする。従って f のすべての fiber 上で L は ample である。$M_x = f^{-1}(x)$ への L の制限を L_x としたとき，C 上の general point x に対して (M_x, L_x) が Del Pezzo manifold になる($\underset{\mathrm{def}}{\equiv}$ M_x の canonical bundle が $(1-n)L_x$)とき，(f, M, C, L) を C 上の Del Pezzo fibration と呼ぶ。このような fibration にどんなタイプの特異 fiber が現れるかを考えたい。なお $n \geqq 2$ とする。

adjoint bundle の性質に基いて偏極多様体の分類を行うと上のような fibration は自然に出てくる。また，Del Pezzo variety に関する深い研究を行うためにも fibration の研究は重要である。なお，L が very ample なら（より一般には $Bs|L|=\emptyset$ なら），超平面切断を何回か行って C 上の elliptic surface が得られる。従って，Del Pezzo fibration を楕円曲面論の高次元 polarized version とみなすこともできる。しかし，Del Pezzo 多様体と elliptic curve のちがいを反映し，我々の理論と楕円曲面の特異 fiber の小平分類理論とは似ているところもあるが相異点も数多い。

証明の詳細は "On Del Pezzo fibrations over curves" (1989, submitted to Osaka J. Math.) にあるのでここでは大要を記すにとどめる。Mori-Kawamata 理論の発展の結果 adjoint bundle に関する extremal ray の contraction map の構造がいろんな場合にくわしくわかるようになった (cf. [F2]) のが技術面での鍵である。

§1. minimality

Fact. (f, M, C, L) を Del Pezzo fibration とする。K を M の canonical bundle とすれば，$K+(1-n)L$ は以下の場合を例外として C 上の line bundle の pull-back になる。

例外：effective divisor E で，$(E, L_E)\cong(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ かつ $[E]_E=\mathcal{O}(-1)$ となるものが存在する。$n\geq 2$ なの

でこのような因子Eは必然的にfのfiberに含まれる。また，smooth pointにblow downできる。

さて，上の例外の場合にはEをblow downする。$M \longrightarrow M^b$ をそのmapとし，$L^b = L + E$ を考えると，$L^b{}_E = 0$ だから L^b は M^b 上のline bundle（の引戻し）とみなせる。Nakai's criterionにより L^b は M^b 上 f^b-ample（ここで $f^b : M^b \longrightarrow C$ はfよりinduceされたもの）になる。そこで(M, L)をこの(M^b, L^b)にとり代えて考えることができる。

上の操作を何回か行えば先のような例外因子はなくなり，$K + (1-n)L$ がCからくるようになる。このとき(f, M, L, C)はminimalと呼ぶことにしよう。これは，楕円曲面論での極小化の操作に対応する。

Fact の証明方針：$K \overset{\text{(マイナス)}}{-} (1-n)L$ はfのgeneral fiber上ではtrivialである。さらにもしf-nefであれば$\mathrm{Pic}(C)$からくることが容易にわかる。よってf-nefでない場合を調べる。

$(K \overset{\text{(マイナス)}}{-} (2-m)L)Z < 0$ となるcurve Zが存在するわけだが，Cone TheoremよりZはextremal rayとしてよい。さらに$f(Z)$はpointとしてよい。このようなcurveはfのgeneral fiberにはなく，従ってZのcontraction mapはfibration typeではあり得ない。extremal rayの分類理論を用いて

(cf. [F2; (2.11.a)]) 先のような因子Eが存在することがわかる。もちろんこれはこの contraction map の例外因子である。

§2. reducible fibers

以下 (f, M, C, L) は §1 の意味で minimal とする。

この§では，既約でない singular fiber の分類について述べる。結果は意外に簡単で，次の表のようになる：

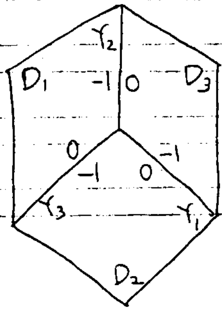
n	components	degree	can be blow down to:	No.
2	3つの $\Sigma(2,1)$	$3+3+3=9$	$\mathbb{P}^2$	(1)
2	$\mathbb{P}^2(1)+\Sigma(6,2)$	$1+8=9$	$\mathbb{P}^2$	(2)
2	$\mathbb{P}^2(2)+\Sigma(3,2)$	$4+5=9$	$\mathbb{P}^2$	(3)
2	$\Sigma(2,1)+\Sigma(3,2)$	$3+5=8$	Σ_1	(4)
2	$\Sigma(1,1)+\Sigma(4,2)$	$2+6=8$	Σ_0	(5)
2	$\Sigma'(2,0)+\Sigma(4,2)$	$2+6=8$	Σ_2'	(6)
2	$\Sigma(2,2)+\Sigma(2,2)$	$4+4=8$	Σ_0	(7)
2	$\Sigma(3,1)+\Sigma(3,1)$	$4+4=8$	Σ_2'	(8)
3	$\Sigma(2,1,1)+\Sigma(2,1,1)$	$4+4=8$	$\mathbb{P}^3$	(9)

以上9種しかない（記号の意味は後述）。とくに $n\geq 4$ とか $d=d(M_x,L_x)\leq 7$ とかの場合 minimal な Del Pezzo fibration には irreducible fiber しかないのである。3次超曲面が3つの超平面の和に退化したりすることを思えば，

この結果は感覚的には受け入れ難くも思われるかもしれないが，実はこのような退化を実現する変形族の total space M は必ず singularity を持ってしまう。このように，Del Pezzo fibration の定義における "M が smooth" とか "L が f-ample" とかの仮定はさりげなく見えても実は強いのである。

さて，先の表の記号の意味であるが，$\mathbb{P}^2(\delta)$ とは pair $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(\delta))$ を表わす。また，$\mathbb{P}^1$上の vector bundle $\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1, \cdots, a_r) = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r)$ に対応する scroll，即ち $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 及びその上の tautological line bundle $\mathcal{O}(1)$ の組を $\Sigma(a_1, \cdots, a_r)$ で表わす。従って $\Sigma(a, b)$ の underlying space は Hirzebruch 曲面 $\Sigma_{|a-b|}$ である。Σ_2' は singular conic surface，$\Sigma'(2,0)$ は $(\Sigma_2', \mathcal{O}(1))$ なる偏極多様体を表わす。以下，(1)〜(9) の各タイプの構造をよりくわしく説明する。

(1) 型では3つの成分 D_1, D_2, D_3 があり，(D_i, L_{D_i}) はどれも $\Sigma(2,1)$ になる。よって $L^2\{D_i\} = 3$ で $d = L^2\{M_t\} = 3+3+3 = 9$ となる。これらの交わりは右の絵のようになる。即ち $Y_1 = D_2 \cap D_3$，$Y_2 = D_3 \cap D_1$，$Y_3 = D_1 \cap D_2$ とすれば，$Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = D_1 \cap D_2 \cap D_3$ は一点で，



これらの交わりは transversal である。$D_1 \cong \Sigma_1$ は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$-bundle であるが，Y_3 は（番号づけをそのようにすれば）fiber の一つであり，Y_2 は (-1)-curve である。一方 D_2 に於ては Y_3 は (-1)-curve であり，D_3 では Y_2 は fiber である。Y_1 についても同様で，全体としての状況は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-対称的である。

D_i はさらに ruling の方向に smooth な $\mathbb{P}^1$ に blow down できる。例えば D_3 を blow down すると $D_1 \longrightarrow D_1^b \cong \mathbb{P}^2$，$D_2 \longrightarrow D_2^b \cong \Sigma_1$ となる。これは実は (3) 型 fiber なのだが，ともあれこの D_2^b をさらに blow down すると $\mathbb{P}^2$ になってしまう。逆に言うと，smooth な $\mathbb{P}^2$-bundle から出発し，ある fiber 内の line をまず blow up し，その際の例外因子 $\cong \Sigma_1$ の一つの fiber を次で blow up する。そうして (1) 型 fiber は得られるわけである。この過程に於て polarization L も適当に調整しなければならないが，それは容易だから省略する。

他の (2)〜(9) の型も同様に blow up によって得られる。(3) 型は前述の中間段階に出てくるが，$\mathbb{P}^2$-bundle の line を中心とする blow-up である。conic で blow-up すれば (2) 型になる。Σ_1-bundle から出発して (-1)-curve 又は $(+1)$-section で blow-up すれば (4) 型となる。

Σ_0-bundle を，$\Sigma_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の fiber で blow-up すれば

(7) 型，(+2)-curve で blow-up すれば (5) 型となる。

Σ_0-fibration の singular fiber Σ_2' から出発し，Σ_2' の vertex を通らない超平面切断（これは (+2)-curve である）で blow-up すれば (6) 型 fiber を得る。vertex を通る line で blow-up すると (8) 型となる。

$\mathbb{P}^3$-bundle の一つの fiber 内の line で blow-up すると (9) 型 fiber になる。

結局，このように curve に blow down することにより，すべての fiber を既約にすることができる。

以下,証明の大要を記す。

既約でない fiber M_0 の分解 $M_0 = \sum_\alpha \mu_\alpha D_\alpha$ を考える。L の各 D_α への制限を L_α とする。$\gamma_{\alpha\beta} = L_\alpha^{m-2} D_\alpha D_\beta$ とおく。fiber の連結性より $\gamma_{\alpha\alpha} < 0$ がわかる。各 fiber 上 $K - (1-n)L$ は trivial だから，これより (D_α, L_α) の断面種数に対し $2g(D_\alpha, L_\alpha) - 2 = \gamma_{\alpha\alpha} < 0$，よって $g \leq 0$.
他方，Cone Theorem により $D_\alpha Z < 0$，$(K + (m-2)L)Z = 0$ となる extremal rational curve Z が存在する。この Z の contraction map は §1 同様に fibration type ではあり得ず birational.
さらに [F2] の分類理論より D_α を例外因子とする good contraction とわかり，X の構造もかなりわかる ([F2; Th.4)。
とくに，$g(D_\alpha, L_\alpha) \leq 0$ となることより $g(D_\alpha, L_\alpha)$ も

$\Delta(D_\alpha, L_\alpha)$も0．従って$\gamma_{\alpha\alpha}=-2$．また$\Delta$種数が0のものの構造理論が適用できる。

因子D_αの交わり具合は交叉数$\gamma_{\alpha\beta}$に反映している。上のように$\gamma_{\alpha\alpha}=-2$だから，$\gamma_{\alpha\beta}$は楕円曲面のときと同様になっており，小平理論によって分類できる。

他方明らかに$d=d(M_x, L_x)=\sum_\alpha \mu_\alpha d(D_\alpha, L_\alpha)$である。Del Pezzo manifoldの分類理論より$d \leqq 9$であるから，M_0はそうたくさんの成分は持ち得ない。こうして小平理論の分類表にあるタイプのうちかなり多数のものが除外できてしまう。

ここから先は$\Delta=0$のpolarized varietyの分類理論をexplicitに用い，(D_α, L_α)の構造に応じてうまく場合を分けつつ議論する。この詳細は略す。ともあれこうして先の分類表を得る。

注．$d \leqq 7$とならないことの直接証明は今のところない。上の方法で分類を完成し，分類表をながめて初めてそれがわかる。curveへのblow downで既約にできることも同様である。このように目標を限定しても，議論はほんの少ししか簡単にならない。$\Delta=0$の分類理論をexplicitに用いる以上，これはやむを得ない。

§3. irreducible singular fibers

f の既約な singular fiber については §2 のものほど決定的な結果はなく未解決な問題も残っている。

そのような fiber V に対し，(V, L) は Del Pezzo variety になることが容易にわかる。即ち，V は局所 Gorenstein で，その canonical bundle は $(1-n)L$ となる。さらに，$H^j(V, tL)=0$ for any $0<j<n$ ともなる。従って $\Delta(V, L)=g(V, L)=1$ でもある。

このような Del Pezzo variety の分類理論はほぼ満足できるものがある (cf. [F1], [F3])。ただし，すべての Del Pezzo variety が Del Pezzo fibration の singular fiber として現れるわけではなく，singular fiber となり得るものを完全に決定するのは一般にはかなり微妙でむつかしい問題のようである。

[F4] には部分的な結果がいくつかあるが，中でも次は注目に値すると思われる：

Fact. $d=d(V, L)\neq 6$ ならば，V は孤立特異点しか持たない。

証明は Del Pezzo variety の分類理論に深く depend する。V のタイプに応じて場合わけし，非孤立特異点を持つと仮定して矛盾を導くのであるが，$d\leqq 4$ の各場合は (V, L) が重みつき完全交叉多様体になることを反映してほぼ同様の方法で

結論に達することができる。$d \geqq 5$ の場合は (V, L) の構造が異なるので方法も全く異なる。ともあれ $d \neq 6$ ならばこうして矛盾が出る。$d=6$ で非孤立特異点をもつ Del Pezzo 多様体は完全に分類できるが，そのいずれについても上の方法をマネしただけでは矛盾が出ない。理由は全く不明。多分，$d=6$ で非孤立特異点をもつ singular fiber は実際に存在すると私は予想しているが，実例を構成するのは意外に難しい。同様の奇妙（?）な困難は4次元での extremal ray の contraction map で Del Pezzo 3-fold を例外因子とするものの分類にも出てくる（cf. [F3]）。この際は $d=7$ の場合が例外的にむつかしい。

ところで，孤立特異点のみの Del Pezzo variety は，特に高次元では，$d \geqq 7$ のものはほとんどない。$d=5, 6$ のものも極くわずかである（cf. [F1]）。従って，例えば $d=7$，$n=3$ なる singular fiber は minimal Del Pezzo fibration には存在し得ないことがいえる。他にも同様の場合がある。

他方 $d \leqq 4$ のものは任意の n に対したくさん実例がある。重みつき完全交叉多様体だから，Lefschetz pencil みたいなものを考えればよいのである。

§4. hyperquadric fibration の場合

Del Pezzo fibration の定義において，"general fiber (M_x, L_x) が Del Pezzo" の部分を "general fiber が2次超曲面" と改めれば hyperquadric fibration の定義になる。とくに $n=1$ なら conic bundle と呼ばれるものである。ここでは $n \geqq 2$ として考える。すると：

Fact. hyperquadric fibration の singular fiber としては既約で孤立特異点のみの2次超曲面しか出てこない。

これはとっくに知られている結果であるべきだと思うが，explicit に主張している文献は私は知らない。証明は，Del Pezzo の場合よりうんとやさしいが，参考のため記そう。

証明の大要：既約でないとすると，$d=2$ だから，2つの成分の和 D_1+D_2 の形である。$K+nL$ が f-nef であるにせよないにせよ，M の extremal rational curve Z で

① $(K+nL)Z=0$ かつ $D_jZ<0$ for some j. ② $(K+nL)Z<0$ かつ $D_jZ \leqq 0$ for some j.

のどちらかをみたすものがある。どちらにせよ $(K+(m-2)L)Z<0$ であって Z の contraction map は fibration type ではあり得ない。結局 D_1, D_2 のどちらかは smooth point に blow down でき，$(D_j, L) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ となる。対称性より D_2 が blow down できるとしてよい。

blow down の結果できる fiber が2次超曲面ならば，D_2

の像となる点 p を通る line ℓ が存在する。ℓ の M における strict transform を ℓ' とすると，$L\ell' = (L^b - D_2)\ell' = L\ell - D_2\ell' \leqq 0$ となってしまい，L が ample であることに反す。

こうして既約な場合に帰着する。△種数の理論より，そ の lower semi-continuity を用いて2次超曲面になることが示せる。また，$\mathcal{E} = f_* \mathcal{O}_M[L]$ は rank が $n+2$ の locally free sheaf になる。そして $M \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ ができる。$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ は C 上の $\mathbb{P}^{n+1}$-bundle であり，各 fiber over $x \in C$ の埋めこみは $\mathbb{Q}^n$ の $\mathbb{P}^{n+1}$ への埋めこみになっている。特に M は $P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ 内の smooth divisor である。

$M_0 = f^{-1}(0)$ の singular locus Σ が curve を含んだとする。Σ 上の任意の点 y において M と $P_0 = \pi^{-1}(0)$，π は $P \to C$，との交わりは transversal でない。よってその tangent spaces は P の接空間 $\Theta(P)_y$ に於て一致する：$\Theta(M)_y = \Theta(P_0)_y$．従って剰余空間も同一視できるから，$\mathcal{N}(M \subset P)_\Sigma \cong \mathcal{N}(P_0 \subset P)_\Sigma$ ここで $\mathcal{N}$ は normal bundle．さて，ところが，$\mathcal{N}(P_0 \subset P)$ は P_0 上 trivial であるのに，$\mathcal{N}(M \subset P)$ は M_0 上 $\mathcal{O}(2)$ と一致して ample である。よって Σ は curve を含み得ない。 QED.

注．上の論法は，Del Pezzo fibration の場合にも役に立つ。特に hyper cubic の場合はほとんど同じでよい。

注．このような結果に於てはCがcurveであることも本質的である。実は次が成立つ（証明は略す）：

Fact. $f : M \longrightarrow S$ は flat morphism，M も S も smooth variety，$m = \dim M$，$s = \dim S$，$n = m - s$，L は f-ample line bundle，general point $x \in S$ に対し (M_x, L_x) は2次超曲面と仮定する。$S_k = \{x \in S \mid \dim(M_x \text{の singular locus}) \geqq k\}$ とおく。このとき $\mathrm{codim}_S S_k > k$ である。

とくに $S_k = \emptyset$ if $k \geqq \dim S$ となるわけである。

References

[F1] T. Fujita, Projective varieties of Δ-genus one, in Algebraic and Topological Theories — to the memory of Dr. Takehiko MIYATA, pp. 149-175, Kinokuniya, 1985.

[F2] ——, On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive, in Algebraic Geometry Sendai 1985, pp. 167-178, Advanced Studies in Pure Math. 10, Kinokuniya, 1987.

[F3] ——, On singular Del Pezzo varieties, to appear.

[F4] ——, On Del Pezzo fibrations over curves, preprint.